



TITLE:

# On the Automorphisms of Hypersurfaces of $\mathbb{P}^n$ (Recent Topics in Algebraic Geometry)

AUTHOR(S):

石井, 清

---

CITATION:

石井, 清. On the Automorphisms of Hypersurfaces of  $\mathbb{P}^n$  (Recent Topics in Algebraic Geometry). 数理解析研究所講究録 1980, 409: 135-152

ISSUE DATE:

1980-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102384>

RIGHT:

# On the automorphisms of hypersurfaces of $\mathbb{P}^n$

東大 理 石井 清

$V$  を  $\mathbb{P}^{n+1}$  内の  $n$  次元  $m$  次の非特異超曲面 ( $n \geq 1, m \geq 3$ ),  $\text{Aut}(V)$  が  $V$  の自己同型群,  $\text{Lin}(V)$  が  $\mathbb{P}^m$  の射影変換である  $V$  の自己同型のなす群を表わすとする。このとき次の結果が得られている。(松村-Monsky [4], 難波 [5])

(1)  $(n, m) \neq (1, 3), (2, 4)$  のとき

$$\text{Aut}(V) = \text{Lin}(V)$$

(2)  $\text{Lin}(V)$  は有限群

また,  $(n, m) = (1, 3)$  のときには,  $V$  は楕円曲線となり  $\text{Aut}(V)$  が無限群であることが古くから知られており,  $(n, m) = (2, 4)$  のときには,  $\text{Aut}(V)$  が無限群であるような  $K3$  曲面  $V$  の存在が知られている。<sup>例は</sup>(塩田-猪瀬 [1])

以下では,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上で考えて,  $\text{Lin}(V)$  に関するいくつかの性質について述べる。主な結果は,  $\text{Lin}(V)$  の maximal order の元に関する定理 § 4 Th.2 及び,  $\text{Lin}(V)$  の maximal

diagonal subgroupに関する定理 §5 Th3 である。

### §1. 対角化

補題1.

$G$ : finite cyclic group

$\sigma: G \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C})$  忠実な表現

$\pi: \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C})$  canonical surjection.

このとき,  $G$  の  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  の忠実な表現  $\sigma$  のであって, 対角行列のみからなるもので,  $\pi \circ \sigma$  が  $\sigma$  と同値な表現になるものが存在する。

証明.  $g$  を  $G$  の generator  $d$  を  $G$  の order とする.  $\pi(\sigma(g))$  の元  $A$  を考えると,  $A^d = \alpha E$   $\alpha \in \mathbb{C}^\times$   $\alpha$  の  $d$  乗根のひとつをとって  $\alpha^{\frac{1}{d}}$  と書く.  $A$  の Jordan 標準形  $J$  は,  $A$  の最小多項式が  $x^d - \alpha$  の約数であることより対角行列であり,  $\sigma(g)$  を  $\alpha^{\frac{1}{d}} J$  とすれば,  $\sigma$  は条件をみたす.  $\square$

補題2.

$\mathbb{P}^{n+1}$  の同次座標を  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ .  $V$  の定義方程式を  $F=0$  とする. このとき,  $F$  には次のいずれかの項が含まれて

いる。

$$x_0^m, x_0^{m-1}x_1, \dots, x_0^{m-1}x_i, \dots, x_0^{m-1}x_{n+1}$$

証明。

$F$  以上の  $(n+2)$  項のどれもが含まれていなければ、 $F$  は  $(m-2)$  次の同次式  $F_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n+1$ ) を用いて、次の様に書ける。

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i x_j F_{ij}$$

よって、 $F=0$  ,  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$  ( $0 \leq i \leq n+1$ ) はすべて  $(1:0:\dots:0)$  を零点にもつ。これは  $V$  の非特異性に矛盾する。  $\square$

以上の補題 1, 2 により  $\text{Lin}(V)$  の元  $g$  が与えられたとき  $\mathbb{P}^{n+1}$  の適当な座標変換によって、 $g$  を  $\text{PGL}(n+2, \mathbb{C})$  の対角行列と考えてよいことがわかる。また、そのとき  $V$  の定義多項式には、任意の  $0 \leq i \leq n+1$  に対して少くともひとつは  $x_i^{m-1}x_j$  という形の項が 0 でない係数をもって含まれていることがわかる。

## §2. $S$ 図形と $\mathcal{O}(S, m)$

ここでは  $\mathbb{P}^{n+1}$  の座標を一組定めたときに、 $\text{PGL}(n+1, \mathbb{C})$  の対角行列からなる  $\text{Lin}(V)$  の部分群を考察する。そのために、 $S$  図形及び  $\mathcal{O}(S, m)$  を定義する。

### 【S図形の定義】

S図形は次の3つの要素からなる

- (1) black vertex  $\bullet$     (2) white vertex  $\circ$
- (3) arrow  $\rightarrow$

これらは次の条件を満たす。

- (1) arrow は2つの vertices を結び (starting vertex と ending vertex とをもつ。)
- (2) ending vertex は white vertex に限る。
- (3) 全ての white vertex はある arrow の ending vertex になっている。また2本以上の arrows の ending vertex になることはない。

このとき S図形  $S$  に対して length を

$$\text{length}(S) = \# \text{ vertices}$$

と定めておく。

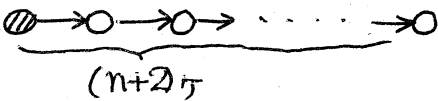
2つの S図形  $S, T$  を並べたものもやはり S図形であり、これを  $S \cup T$  と書くことにする。

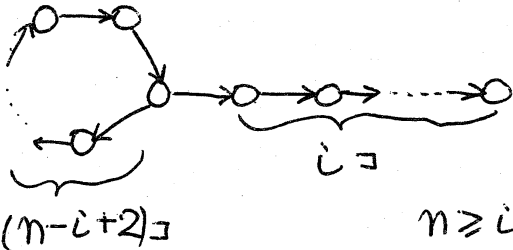
また, arrows によって連結している vertices は, それらを結び arrows と共にもとの S図形の component と呼ばれる。

次に S図形の例を並べる。

# [S 図形の例]


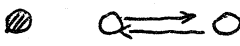


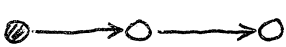
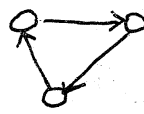

A ; 

$B^n$  ;   $n \geq 0$

$C^{n-i,i}$  ;   $n \geq i \geq 0$

## [length(S)=3 の S 図形]

length=3 の S 図形は以下の 7 種類である。

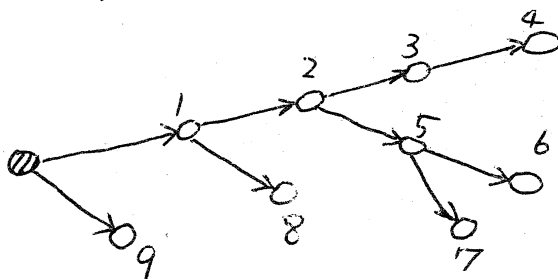
- |   |  |
|---|--|
| (1)  | (5)  |
| (2)  | (6)  |
| (3)  | (7)  |
| (4)  |  |

## [branch 及び cycle]

S 図形において white vertices が arrows によって円状に連結されている部分のことを cycle と呼ぶ。例えば,  $C^{n-i,i}$  の  $(n-i+2)$  の white vertices の部分が cycle である。また, length=3 の S 図形の (5), (6) (7) には cycle が含まれている。次に, 直線状に white vertices がつながっている部分を

S図形の branch という。black vertex または cycle から出ている branch で長さが最大のものを main branch と呼ぶ。main branch の取り方は一通りではない。

例えば下の S図形において, 1-2-3-4 または, 1-2-5-6 がいずれも main branch になりうる。このような場合にはどちらかを指定しておくこととする。この S図形には, main branches 1-2-3-4, 8 及びその他の branches 5-6, 7, 8 の 5 本の branches がある。



### 〔S図形と $V$ の対応〕

$\mathbb{P}^{n+1}$  の座標を一組定めたとき, その座標を  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  とすると,  $V$  の定義多項式  $F$  には, §1 補題 2 によって, 任意の  $0 \leq i \leq n+1$  に対して, 適当な  $0 \leq j \leq n+1$  であって,  $x_i^{m_i} x_j$  が  $F$  に含まれるようなものがあつた。そこで, 各  $i$  に対してそのような  $j$  をそれぞれひとつだけ選んでおく。それを  $j_i$  と書こう。すると, このような  $j_i$  の選び方によって, S図形が次のように定まる。

各  $i$  に対して vertex  $j_i$  を置く。  $j_i = i$  のときには, その

vertex を black vertex とする。また,  $i \neq j$  のときには vertex  $j$  を starting vertex に, vertex  $i$  を ending vertex にする arrow をひく。すなわちこの場合には vertex  $i$  は, white vertex である。

このように定めた  $S$  図形は,  $V$  及び  $\mathbb{P}^n$  の座標のとり方によっているわけではないことに注意すべきである。

さて, このとき,  $\mathcal{O}(S, m)$  を次のように定義する。

$$\mathcal{O}(S, m) = \{ g \in GL(n+2, \mathbb{C}) \mid g \text{ は対角行列で} \\ x_i^{m-1} x_{j_i} \text{ を不変にする } (\forall i) \}$$

$\mathcal{O}(S, m)$  は,  $S$  及び  $m$  によって定まる有限 abel 群である。

### §3. $\mathcal{O}(S, m)$ の基本性質

$S$  図形  $S$  及び自然数  $m$  を与えたとき, ( $m \geq 3, \text{length}(S) \geq 3$ )  $\mathbb{P}^{n+1}$  の超曲面  $V(S)$  が迷に同型をのぞいて定まる。すなわち  $S$  の各 vertex に 0 から  $n+1$  までの番号を適当に振って, black vertex  $i$  には  $x_i^m$ , white vertex  $i$  には,  $i$  を ending vertex とする arrow の starting vertex  $j$  に対して  $x_i^{m-1} x_j$  として作った monomials の和を定義多項式とする超曲面を  $V(S)$  とする。このとき,  $V(S)$  は必ずしも非特異とは限らない。



以下に  $\mathcal{O}(S, m)$  の基本性質及び基本定理を述べる。

- (1)  $\mathcal{O}(S, m)$  は 位数  $m$  の標準的な cyclic group を含む。  
すなわち, 1 の原始  $m$  乗根を  $\zeta$  としたとき,  $\zeta \cdot 1 \in GL(n+2, \mathbb{C})$  によって生成される cyclic group である。この cyclic group による  $\mathcal{O}(S, m)$  の factor group を  $\mathcal{O}_0(S, m)$  と書く。
- (2) 2つの  $S$  図形  $S, T$  に対して  $\mathcal{O}(S \sqcup T) \cong \mathcal{O}(S) \oplus \mathcal{O}(T)$
- (3)  $\mathcal{O}(\underbrace{A \sqcup A \sqcup \cdots \sqcup A}_{(n+2)\square}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}_{(n+2)\square}$
- (4)  $\mathcal{O}(B^n) \cong \mathbb{Z}/m(m-1)^{n+1}\mathbb{Z}$
- (5)  $\mathcal{O}(C^{n,0}) \cong \mathbb{Z}/\{(m-1)^{n+2} - (-1)^{n+2}\}\mathbb{Z}$

証明。(1), (2) は明らか。(3) ~ (5) は簡単な計算である。例えば (5) を示そう。 $x_0^{m-1}x_1, x_1^{m-1}x_2, \dots, x_n^{m-1}x_{n+1}, x_{n+1}^{m-1}x_0$  を不変にする  $GL(n+2, \mathbb{C})$  の対角行列を  $g = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}]$  とすると,  $\mathcal{O}(S, m)$  の定義より,  $\zeta_0^{m-1}\zeta_1 = \zeta_1^{m-1}\zeta_2 = \cdots = \zeta_{n+1}^{m-1}\zeta_0 = 1$  である。 $\zeta_{n+1}$  を  $\zeta$  と書けば,  $\zeta_0 = \zeta^{1-m}, \zeta_1 = \zeta^{(1-m)^2}, \dots, \zeta_i = \zeta^{(1-m)^{i+1}}, \dots, \zeta_{n+1} = \zeta^{(1-m)^{n+2}}$ 。よって,  $\zeta^{(1-m)^{n+2}} = \zeta$  より  $\zeta$  は 1 の  $\{(m-1)^{n+2} - (-1)^{n+2}\}$  乗根。逆にそのような  $\zeta$  を与えれば  $g$  は定まる。  $\square$

次に, branch の位置が  $\mathcal{O}(S, m)$  によらないことを示す。

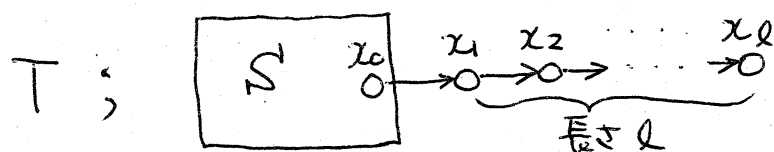
## Th.1 (Branch 接続定理)

長さ  $l$  の branch をもつ  $S$  図形  $T$  から  $S$  の branch をのぞいた  $S$  図形を  $S'$  とすると

$$\mathcal{O}_L(T, m) \cong \mathcal{O}_L(S, m) \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^l \mathbb{Z}$$

証明。標準的に  $\mathcal{O}_L(T, m) \supset \mathcal{O}_L(S, m)$  とみなせる。

また, canonical surjection  $p: \mathcal{O}_L(T, m) \rightarrow \mathcal{O}_L(S, m)$  が,  $\mathcal{O}_L(T, m)$  の元  $q$  に対して,  $q$  の  $S$  の各 vertex  $\wedge$  の作用をとることによって定まっていることが明らかにわかる。そこで,  $p$  とともに  $\mathcal{O}_L(T, m)$  の直和分解を与えるような, surjection  $q: \mathcal{O}_L(T, m) \rightarrow \mathbb{Z}/(m-1)^l \mathbb{Z}$  を構成すればよい。簡単のために,  $\mathbb{Z}/(m-1)^l \mathbb{Z}$  を 1 の  $(m-1)^l$  乗根全体のなす乗法群  $\mu = \mu_{(m-1)^l}$  と適当な方法で同一視し,  $q$  を  $\mathcal{O}_L(T, m)$  から  $\mu$  の homomorphism として構成する。



上図のように, 長さ  $l$  の branch の各 vertex に  $x_1 \sim x_l$  の文字を対応させ, branch が  $S$  と接続されている vertex に  $x_0$  の文字を対応させておく。

以下の三通りに分けて証明する。

(1) branch が main branch,かつ vertex  $x_0$  が black vertex のとき

$\mathcal{O}(T, m)$  の元  $g$  が  $x_i$  ( $0 \leq i \leq l$ ) 上に  $g: x_i \rightarrow s_i x_i$  と作用しているとき

$$s_0^m = s_0 s_1^{m-1} = s_1 s_2^{m-1} = \dots = s_{l-1} s_l^m = 1$$

となる。 $s_l = s$  と書けば,  $s_i = s^{(1-m)^{l-i}}$  ( $0 \leq i \leq l$ ) ゆえ,  $s$  は 1 の  $m(m-1)^l$  乗根 である。そこで  $q: \mathcal{O}(T, m) \rightarrow \mu$  に,  $q(g) = s_0^{-1} s_l = s^{1-(1-m)^l}$  と定めておく。

このとき,  $\ker p \cap \ker q = \{1\}$  である。実際,  $\mathcal{O}(T) \ni g$  が  $S$  の各 vertex ( $l$  に対応する文字) の上へ trivial に作用していれば,  $s_0 = 1$  であり, 従って,  $q(g) = s_l = 1$  ならば  $s_i = 1$  ( $1 \leq i \leq l$ ) だから  $g = 1$  となってしまう。

そこで  $p \times q: \mathcal{O}(T, m) \rightarrow \mathcal{O}(S, m) \times \mu$  は単射。次に,  $\mathcal{O}(S)$  の元  $h$  と  $\mu$  の元  $\varepsilon \in \varepsilon$  と与え,  $h: x_0 \mapsto s_0 x_0$  のとき,  $\mathcal{O}(T)$  の元  $g \in$ ,  $g|_S = h$ ,  $g: x_i \mapsto s_i x_i$   $s_i = s_l^{(1-m)^{l-i}}$ ,  $s_l = s_0 \varepsilon$  ( $1 \leq i \leq l$ ) として構成できる。

よって  $p \times q: \mathcal{O}(T) \rightarrow \mathcal{O}(S) \times \mu$  は isomorphism でありこの場合には Th.1 の証明ができた。

(2) branch が main branch 2" vertex  $x_0$  が cycle  
に含まれているとき

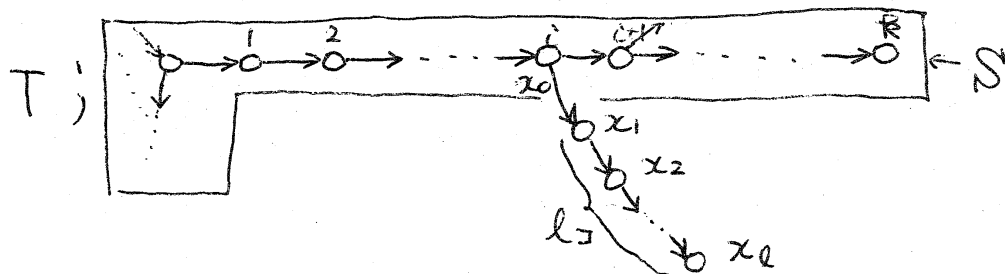
このときには, cycle の長さ  $k$  とすると, ( $k \geq 2$ )  $T$   
の前に述べた基本性質 (5) によって,  $g \in \Omega(T)$ ,  $g: x_i \mapsto \xi_i x_i$   
ならば,  $S_0$  は 1 の  $\{(m-1)^k - (-1)^k\}$  乗根であることがわかる。  
 $q: \Omega(T) \rightarrow \mu$  を (1) と同様に  $q(q) = S_0^{-1} S_q$  と定め  
れば同じ議論が成り立つ。

(3) branch が main branch でない場合

このときには,  $x_0$  は 長さ  $k$  の branch の根元から数えて  
 $i$  番目の vertex でありさらに, branch の定め方から

$$k > k-i \geq l$$

であるとしてよい。(下図参照)



$\Omega(T)$  の元  $g$  が  $g: x_i \mapsto \xi_i x_i$  ( $0 \leq i \leq l$ )

また vertex  $k$  に対して  $\xi$ -倍の作用をもつとするとき,

$$S_0 S_1^{m-1} = S_1 S_2^{m-1} = \dots = S_{l-1} S_l^{m-1} = 1$$

$$S_0 = \xi^{(1-m)^{k-i}}$$

であるから,  $q: \Omega(T) \rightarrow \mu$  且  $q(q) = \xi^{-(1-m)^{k-i-l}} S_q$

と定める。このとき(1)と同様にして isomorphism  $p \times q$  によって  $\mathcal{O}(T) \cong \mathcal{O}(S) \times \mu$  がわかる。

以上によって Th.1 は証明された。  $\square$

#### §4. $\text{Lin}(V)$ の maximal order の元

次の定理が成り立つ。

Th.2.

$V$ ;  $\mathbb{P}^m$  内の  $n$  次元  $m$  次非特異超曲面 ( $n \geq 1, m \geq 3$ )

$g \in \text{Lin}(V)$ ,  $d$  によって  $g$  の位数を表わす。

このとき,

$$d \leq m(m-1)^n$$

であり, 等号は次の場合に射影変換を除いて一致する。

$$V; \quad x_0^m + x_1^m + x_1 x_2^{m-1} + x_2 x_3^{m-1} + \cdots + x_n x_{n+1}^{m-1} = 0$$

$$g = [1, \zeta^{(1-m)^n}, \zeta^{(1-m)^{n-1}}, \dots, \zeta^{1-m}, \zeta]$$

但し,  $\zeta$  は 1 の原始  $m(m-1)^n$  乗根を表わすものとする。

(なお, この定理は塩田先生の予想されたものです。)



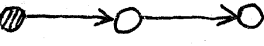


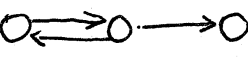
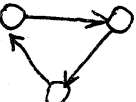
証明。  $n$  に関する induction で証明する。

最初に,  $\forall g \in \text{Lin}(V)$  ( $\forall V$ ) は, §1補題1によって対角化され, 補題2によって, 適当な  $\text{length} = n+2$  の  $S$  図形

に対して  $\sigma_0(S, m)$  の元とみなせることを注意しておく。

従って,  $d \leq m(m-1)^n$  を示すには,  $\text{length} = n+2$  の任意の  $S$  図形  $S$  に対して,  $\sigma_0(S, m)$  の maximal order の元の位数が  $m(m-1)^n$  を超えないことを言えばよい。

$n=1$  の場合。  $\text{length} = 3$  の  $S$  図形 7通りについてしらみつぶしに  $\sigma_0(S, m)$  を調べる。

$S$	$\sigma_0(S, m)$ の単因子	$\sigma_0(S, m)$ の単因子
	$m, m, m$	$m, m$
	$m, m(m-1)$	$m(m-1)$
	$m(m-1)^2$	$(m-1)^2$
	$m-1, m(m-1)$	$m-1, m-1$
	$m \{ (m-1)^2 - 1 \}$	$m(m-2)$
	$\{ (m-1)^2 - 1 \} (m-1)$	$(m-1)(m-2)$
	$(m-1)^3 + 1$	$m^2 - 3m + 3$

ゆえに,  $n=1$  の場合には  $m(m-1)$  が上限であることが確かめられる。

次に一般の  $n$  について考える。そこで,  $\mathcal{O}_0(S, m)$  の最大位数が  $m(m-1)^n$  にとどかないような  $S$  図形を除外してゆく。以下の3つの性質を持つものは除外される。

- (1) components の数が3つ以上のもの
- (2) 2本以上の branch をもつもの
- (3) cycle を含むもの

なぜならば, 3つ以上の components をもつ  $S$  図形  $S$  は, 適当な3つの  $S$  図形  $S_1, S_2, S_3$  によって  $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$  と書ける。 $\mathcal{O}(S) = \mathcal{O}(S_1) \oplus \mathcal{O}(S_2) \oplus \mathcal{O}(S_3)$  ゆえ,  $\mathcal{O}_0(S)$  の最大位数の元の位数は, 各  $\mathcal{O}(S_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) が  $m$  位の cyclic group を含むことにより, 高々  $m^3(m-1)^{n-4}$  を超えない。 $m \geq 3$  のとき, これは  $m(m-1)^n$  より小さい。

また2本以上の branches をもつ  $S$  図形  $S$  については, branch の接続定理によって, 適当な  $S$  図形  $T$  によって,  $\mathcal{O}(S, m) = \mathcal{O}(T, m) \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^k \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^k \mathbb{Z}$  ( $k \geq 2$  としておく) となるから, やはり最大位数が,  $m(m-1)^{n-k}$  を超えないことがわかる。

最後に, cycle を含む  $S$  図形  $S$  については, それが長さ  $k$  の cycle であれば,  $S$  図形の基本性質(b)によって, branch 接続定理を使って cycle の branch を他に移すことにより

$$\mathcal{O}(S, m) = \mathcal{O}(T, m) \oplus \mathbb{Z}/\{(m-1)^k - (-1)^k\} \mathbb{Z}$$

または,  $S$  の component が cycle を含む 1 つだけのときは,

$$\Omega(S, m) = \mathbb{Z}/\{(m-1)^k - (-1)^k\}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m-1)^k\mathbb{Z} \oplus \dots$$

を得る。第一の場合には, 最大位数は  $(m-1)^{n-k}\{(m-1)^k - (-1)^k\}$  を, 第二の場合には,  $\frac{1}{m}(m-1)^{n+2-k}\{(m-1)^k - (-1)^k\}$  を超えない。いずれも  $m(m-1)^n$  より小さい。

従って, (1)~(3)によって除外されない  $S$  図形を考えればよいがそれは次の 2 つである。

$$B^n; \quad \textcircled{\bullet} \rightarrow \textcircled{\bullet} \rightarrow \textcircled{\bullet} \rightarrow \dots \rightarrow \textcircled{\bullet}$$

$$A \sqcup B^{n-1}; \quad \textcircled{\bullet} \quad \textcircled{\bullet} \rightarrow \textcircled{\bullet} \rightarrow \textcircled{\bullet} \rightarrow \dots \rightarrow \textcircled{\bullet}$$

ところが,  $\Omega_0(B^n)$  及び  $\Omega_0(A \sqcup B^{n-1})$  の最大位数の元の位数は, それぞれ  $(m-1)^{n+1}$  及び  $m(m-1)^n$  である。

ゆえに,  $d \leq m(m-1)^n$  であり  $Th$  の前半を示すことができた。

次に,  $V, q$  が定理の後半の仮定を満たすとするとき, 今までの考察により,  $\mathbb{P}^m$  の適当な座標変換によって  $V$  の定義多項式は

$$F = x_0^m + x_1^m + x_1 x_2^{m-1} + \dots + x_m x_{m+1}^{m-1} + (\text{other terms})$$

の形であり, また簡単な計算によって,

$$q = [1, \zeta^{(1-m)^n}, \zeta^{(1-m)^{n-1}}, \dots, \zeta^{1-m}, \zeta]$$

( $\zeta$ : 1 の原始  $m(m-1)^n$  乗根) としてよいことがわかる。



そこで後は,  $g$  によ,  $z$  不変な monomial  $\prod x_i^{k_i}$  が  
 $x_0^m, x_1^m, x_1 x_2^{m-1}, \dots, x_n x_{n+1}^{m-1}$  しかないことを示せばよい。  
 $0 \leq i \leq n+1$

すなわち, 不定方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(1-m)^n + k_2(1-m)^{n-1} + \dots + k_n(1-m) + k_{n+1} \equiv 0 \\ (\text{mod } m(m-1)^n) \\ \sum_{1 \leq i \leq n+1} k_i \leq m \end{array} \right.$$

を解けばよい。nに関する帰納法によって、上に挙げたもの  
しかないことを示す。

$n=1$  のとき,

$$\begin{cases} k_1(1-m) + k_2 \equiv 0 \pmod{m(m-1)} \\ k_1 + k_2 \leq m \end{cases}$$

$$k_2 = 0 \text{ のとき } k_1 = 0 \text{ または } m, \quad k_2 \neq 0 \text{ のとき, } k_2 = m-1$$
$$R_1 = 1. \text{ よって正しい。}$$

$n > 1$  のとき,

$k_{n+1} \neq 0$  とすると,  $k_{n+1} = m-1$ 。明らかに  $k_n = 1$ 。

 $p_{\text{NH}} = 0$  のとき には

$$k_1(1-m)^{n-1} + k_2(1-m)^{n-2} + \dots + k_n \equiv 0 \pmod{m(m-1)^{n-1}}$$

帰納法の仮定により,  $(k_1, k_2, \dots, k_n) = (0, 0, \dots, 0) (m, 0, \dots, 0)$   
 $(1, m-1, 0, \dots, 0) (0, 1, m-1, 0, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 0, 1, m-1)$



### §5. $\text{Lin}(V)$ の diagonal subgroup

$\text{Lin}(V)$  の同時対角化可能な subgroup について次の結果が成り立つ。

Th. 3.

$V; \mathbb{P}^{m+1}$  内の  $n$  次元  $m$  次非特異超曲面 ( $n \geq 1, m \geq 3$ )

$G; \text{Lin}(V)$  の同時対角化可能な subgroup

このとき,

$$\# G \leq m^{n+1}$$

であり, 等号は, 次の場合に射影変換を除いて一致する。

$$V; x_0^m + x_1^m + \dots + x_{n+1}^m = 0$$

$$G = \{ [1, \zeta^{i_1}, \zeta^{i_2}, \dots, \zeta^{i_{n+1}}] \}$$

ここで,  $\zeta$  は 1 の原始  $m$  乗根,  $i_1 \sim i_{n+1}$  は整数である。

証明は, Th. 2 と同様なので省略する。

最後に, 講演の時に話した  $\text{PGL}$  の有限 abel 群の  $\text{GL}$  への表現に関する補題は, 明らかな誤りであったことが判明いたしました。聴衆の方々に御迷惑をおかけしたことをお詫びいたします。

- [1] T. Shioda - H. Inose ; " On singular K3 surfaces"  
Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami  
- Cambridge Univ. Press (1977)
- [2] T. Shioda ; " The Hodge Conjecture for Fermat  
Varieties " Math. Ann. 245, 175 ~ 184 (1979)
- [3] T. Shioda ; " On the Picard number of a  
complex projective variety " to appear
- [4] H. Matsumura - P. Monsky ; " On the automorphisms  
of hypersurfaces " J. Math. Kyoto Univ. 3-3 (1964)
- [5] M. Namba ; " Families of Meromorphic Funct-  
ions on Compact Riemann Surfaces " Springer  
Lecture Note 1767
- [6] K. Iwasawa - T. Tamagawa ; " On the group of  
automorphisms of a function fields " J. Math Soc.  
Japan Vol 3 No. 1 (1951) / Correction, Vol. 4 No. 1, 2  
(1952)